ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $f: P_m \to \widehat{P}_n$ $(m>n)$

Б.А.А н д р е е в
(Калининградский университет)

Продолжается (см.[2]) изучение распределения $\{L^0\}$ линейных элементов, порожденного в P_m дифференцируемым отображением $f: P_m \to \widehat{P}_n$ $(m>n)$, где $\widehat{P}_n$ -расширенное аффинное пространство. Доказан ряд теорем, связывающих геометрически индикатрису отображения f [2] с фокальным многообразием, проективитетом Бомпиани-Пантази и соприкасающимися гиперквадриками распределения $\{L^0\}$. Построено и геометрически охарактеризовано отображение t, которое нормали 1 рода распределения $\{L^0\}$ ставит в соответствие лежащую в этой нормали оснащающую $(n-1)$-плоскость. В работе используются обозначения статьи [2]. Индексы принимают следующие значения: $J,\ldots=\overline{1,m}$; $i,\ldots=\overline{1,n}$; $\alpha,\ldots=\overline{1,n}$; $\hat{\alpha},\ldots=\overline{n+1,m}$.

Основным ассоциированным образом II дифференциальной окрестности дифференцируемого отображения $f: P_m \to \widehat{P}_n$ $(m>n)$ является алгебраическое многообразие $\mathcal{J}$, определяемое для каждой точки $P^0 \in P_m$ системой уравнений

$$\Lambda^i_{JK} X^J X^K - 2\Lambda^i_J X^J X^0 = 0 \qquad (1)$$

Многообразие $\mathcal{J}$ имеет в общем случае размерность $m-n$, порядок 2^n и называется индикатрисой отображения f в точке P^0 [2,с.7]. Касательное в точке P^0 к многообразию $W_{P^0}=f^{-1}(f(P^0))$ подпространство L^0 определяется системой

$$\Lambda^i_J X^J = 0 \qquad (2)$$

и, таким образом, является касательным в точке P^0 подпространством к многообразию $\mathcal{J}$. Многообразие $\mathcal{J}$ распадается на два подмножества: 1) множество $\mathcal{M}=\mathcal{J}\setminus(\mathcal{J}\cap L^0)$ главных точек [2,с.6] отображения f, т.е. точек, каждая из которых характеризуется тем, что она инцидентна некоторой $K(P_\gamma)$-главной прямой связки $\{P^\circ\}$ и является прообразом точки несобственной гиперплоскости пространства $\hat{P}_n$ при соответствующей касательной коллинеации $K(P_\gamma)$; 2) множество $\mathcal{J} \cap L^\circ$, состоящее из точек прямых, определяющих в P° асимптотические направления распределения $\{L^\circ\}$ [2,с.9]. В [2] показана роль индикатрисы $\mathcal{J}$ как инвариантной направляющей конуса характеристических прямых отображения f. Покажем, что индикатриса $\mathcal{J}$ геометрически определяет фокальное многообразие, обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази и семейство соприкасающихся гиперквадрик распределения $\{L^\circ\}$ линейных элементов [1].

Рассмотрим определяемое индикатрисой $\mathcal{J}$ линейное семейство $\{q\}$ гиперквадрик $\lambda_i F^i = 0$, где F^i – левые части уравнений (1). Пусть $q(P)$ – поляра точки P относительно гиперквадрики $q \in \{q\}$ и $\mathcal{J}(P) = \bigcap_{q\in\{q\}} q(P)$.

Т е о р е м а 1. Многообразие фокальных точек распределения $\{L^\circ\}$, соответствующее направлению, которое определяется данной прямой связки $\{P^\circ\}$, является пересечением $L^\circ \cap \mathcal{J}(P)$ подпространства L° и поляр любой точки $P \neq P^\circ$ этой прямой относительно всех гиперквадрик $q \in \{q\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гиперквадрики семейства $\{q\}$ определяются также уравнениями $\lambda_{\hat\alpha} \Phi^{\hat\alpha} = 0$, где $\Phi^{\hat\alpha}$ – левые части уравнений (9) [2]. Многообразие фокальных точек элемента L° распределения $\{L^\circ\}$, соответствующее направлению, задаваемому величинами μ^γ, определяется системой (см. (9.7) [1]):

$$X^{\hat\alpha} = 0,\quad \Lambda^{\hat\beta}_{\alpha\gamma}\mu^\gamma X^\alpha + \mu^{\hat\beta} X^\circ = 0. \qquad (3)$$

Для координат точек пересечения $L^\circ \cap \mathcal{J}(P)$, где $P = \{Y^\circ, Y^\gamma\}$, $P \neq P^\circ$, получаем систему

$$X^{\hat\alpha} = 0,\quad \Lambda^{\hat\beta}_{\alpha\gamma} X^\alpha Y^\gamma + X^\circ Y^{\hat\beta} = 0. \qquad (4)$$

Если прямая $[P^\circ P]$ и величины μ^γ определяют одно и то же направление в P°, то системы (3) и (4) равносильны.

Из теоремы 1 вытекают следующие два предложения.

Т е о р е м а 2. Пусть ν_0 – множество не совпадающих с точкой P° точек нормали ν первого рода распределения $\{L^\circ\}$. Тогда множество

$$\bigcup_{P\in\nu_0} (\mathcal{J}(P) \cap L^\circ) \qquad (5)$$

является фокальным многообразием распределения $\{L^\circ\}$, соответствующим нормали ν.

Т е о р е м а 3. Обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази [1,с.84] распределения $\{L^\circ\}$ нормали 1 рода ν ставит в соответствие линейную поляру точки P° относительно многообразия (5) и, таким образом, определяется индикатрисой $\mathcal{J}$.

Т е о р е м а 4. Проективитет Бомпиани-Пантази распределения $\{L^\circ\}$, порожденного отображением $f: P_m \to \hat{P}_1$, является поляритетом относительно индикатрисы $\mathcal{J}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$ семейство $\{q\}$ состоит из индикатрисы $\mathcal{J}$, являющейся гиперквадрикой, а $\mathcal{J}(P)$ является полярой точки P относительно $\mathcal{J}$.

Несмотря на то, что многообразие $\mathcal{J}$, являющееся пересечением всех гиперквадрик семейства $\{q\}$, имеет с многообразием W_{P° в точке P° одинаковые конусы асимптотических направлений, и, таким образом, гиперквадрики семейства $\{q\}$ обладают одним из свойств соприкасающихся гиперквадрик голономного распределения $\{L^\circ\}$, они не являются соприкасающимися гиперквадриками. Покажем, что с помощью индикатрисы $\mathcal{J}$ можно определить семейство соприкасающихся гиперквадрик.

Пусть H – произвольная гиперплоскость, не инцидентная точке P°, а T – проективное преобразование пространства P_m, определяемое условиями: 1) $T(P^\circ) = P^\circ$, $T|_H = id_H$; 2) точка $P \in P_m$ гармонически сопряжена точке $T(P)$ относительно точек P° и K, где K – точка пересечения прямой $[P^\circ P]$ с гиперплоскостью H.

Т е о р е м а 5. Образы гиперквадрик семейства $\{q\}$ при отображении T образуют семейство соприкасающихся гиперквадрик распределения $\{L^\circ\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершины R_γ репера в P_m на гиперплоскость H. Тогда, если $P = \{X^\circ, X^\gamma\}$ и $T(P) = \{Y^\circ, Y^\gamma\}$, имеем: $Y^\circ = X^\circ$, $Y^\gamma = -X^\gamma$. Для $T(q)$, $q \in \{q\}$ получаем из (9) [2]:

$$\lambda_{\hat\gamma}(\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta - 2X^\circ X^{\hat\gamma} + 2\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\beta} X^{\hat\alpha} X^\beta + \Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta} X^{\hat\alpha} X^{\hat\beta}) = 0. \qquad (6)$$

Справедливость доказываемого утверждения теперь вытекает из (11.7) [1].

Пусть ν – произвольная нормаль 1 рода распределения $\{L^\circ\}$, задаваемая системой

$$X^{\alpha} - H^{\alpha}_{\hat\alpha} X^{\hat\alpha} = 0, \tag{7}$$

где для объекта $H^{\alpha}_{\hat\alpha}$ выполняется

$$\overset{\circ}{\nabla} H^{\alpha}_{\hat\alpha} = -\Pi^{\alpha}_{\hat\alpha}. \tag{8}$$

Покажем, что на множестве нормалей 1 рода в данной точке P° кроме обобщенного проективитета Бомпиани–Пантази во 2-й дифференциальной окрестности определяется отображение, которое нормали ν ставит в соответствие лежащую в этой нормали оснащающую плоскость Картана [4], [1]:

$$X^{\alpha} - H^{\alpha}_{\hat\alpha} X^{\hat\alpha} = 0, \quad X^{\circ} - A_{\hat\alpha} X^{\hat\alpha} = 0, \tag{9}$$

причем $\overset{\circ}{\nabla} A_{\hat\alpha} = -\Pi^{\circ}_{\hat\alpha} - H^{\alpha}_{\hat\alpha}\Pi^{\circ}_{\alpha}$.

Пусть

$$H^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\gamma} = \Lambda^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\gamma} + \Lambda^{\hat\beta}_{\gamma(\hat\alpha} H^{\gamma}_{\hat\gamma)} + \Lambda^{\hat\beta}_{\alpha\gamma} H^{\alpha}_{\hat\alpha} H^{\gamma}_{\hat\gamma}. \tag{10}$$

Система величин $\{H^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\gamma},\ H^{\gamma}_{\hat\gamma}\}$ является геометрическим объектом:

$$\overset{\circ}{\nabla} H^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\gamma} = \delta^{\hat\beta}_{(\hat\alpha}\Pi^{\circ}_{\hat\gamma)} + \delta^{\hat\beta}_{(\hat\alpha} H^{\gamma}_{\hat\gamma)}\Pi^{\circ}_{\gamma} \tag{11}$$

Легко показать, что система величин $\{H^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\gamma},\ H^{\gamma}_{\hat\gamma}\}$ определяет пересечение индикатрисы $\mathcal{J}$ с нормалью ν, которая является индикатрисой $\mathcal{J}|_{\nu}$ отображения $f|_{\nu}$, биективного в некоторой области $U \subset \nu$, $P^{\circ} \in U$. Пусть

$$H_{\hat\alpha} = \frac{1}{n+1} H^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\beta}. \tag{12}$$

Тогда имеем:

$$\overset{\circ}{\nabla} H_{\hat\alpha} = \Pi^{\circ}_{\hat\alpha} + H^{\alpha}_{\hat\alpha}\Pi^{\circ}_{\alpha}. \tag{13}$$

Полагая

$$A_{\hat\alpha} = -H_{\hat\alpha}, \tag{14}$$

получаем соответствующую нормали ν оснащающую плоскость

$$X^{\alpha} - H^{\alpha}_{\hat\alpha} X^{\hat\alpha} = 0, \quad H_{\hat\alpha} X^{\hat\alpha} + X^{\circ} = 0, \tag{15}$$

которую обозначим $t(\nu)$. Очевидно, определенное внутренним

образом соответствие $t: \nu \mapsto t(\nu)$ является взаимно-однозначным.

Для геометрической характеристики $(n-1)$-плоскости $t(\nu)$ рассмотрим сужение $f|_{\nu}: \nu \to \hat{P}_n$ отображения f на ν. В связке касательных к $f|_{\nu}$ в точке P° коллинеаций выделим одну коллинеацию K_0, характеризующуюся тем, что якобианы отображений $f|_{\nu}$ и K_0 касаются в P°. Будем, следуя [3], называть коллинеацию K_0 локальной коллинеацией отображения $f|_{\nu}$. В частности, при $n=1$ локальная коллинеация K_0 является соприкасающейся коллинеацией для $f|_{\nu}$ в P°.

Т е о р е м а 6. $(n-1)$-плоскость $t(\nu)$ является прообразом несобственной гиперплоскости пространства $\hat{P}_n$ при локальной коллинеации K_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершины $R_{\hat\alpha}$ репера в n-плоскость ν. Связка касательных к $f|_{\nu}$ в P° коллинеаций $K(P_{\hat\alpha})$ запишется в неоднородных координатах в виде

$$y^{i} = \frac{\Lambda^{i}_{\hat\alpha} Y^{\hat\alpha}}{1 - P_{\hat\alpha} Y^{\hat\alpha}}. \tag{16}$$

Для якобианов $I(f|_{\nu})$ и $I(K(P_{\hat\alpha}))$ отображений $f|_{\nu}$ и $K(P_{\hat\alpha})$ имеем

$$d\ln I(f|_{\nu}) = -(n+1) H_{\hat\alpha}\Omega^{\hat\alpha}_{0}; \quad d\ln I(K(P_{\hat\alpha})) = (n+1) P_{\hat\alpha}\Omega^{\hat\alpha}_{0}. \tag{17}$$

Прообраз

$$X^{\circ} - P_{\hat\alpha} X^{\hat\alpha} = 0, \quad X^{\alpha} = 0 \tag{18}$$

несобственной гиперплоскости в $\hat{P}_n$ при отображении $K(P_{\hat\alpha})$ совпадает с $t(\nu)$ в том и только в том случае, если $P_{\hat\alpha} = -H_{\hat\alpha}$, из чего, в силу (17) и касания в P° отображений $f|_{\nu}$ и $K(P_{\hat\alpha})$, вытекает доказываемое утверждение.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49–94.

2. А н д р е е в Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ ($m > n$) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1979. Вып. 10. С. 5–9.

3. Ч е х Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I: Чехосл. матем. ж. 1952. Т. I. С. 91–107.

4. Cartan E. Les espaces à connexion projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. М., 1937. Вып. 4.